27/11/2019

• <u>Διατεταγμένα Στατιστικά</u>

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. (ανεξάρτητες και ισόνομες) από έναν πληθυσμό με κατανομή που περιγράφεται από τη σ.π.π $f_X(x)$ και $F_X(x)$ α.σ.κ.

<u>Ενδιαφέρον</u>: η εύρεση της κατανομής $\min X_i$, $\max X_i$

$$\text{συμβ} \quad \begin{array}{cc} \min X_i & \max X_i \\ \| & \| \\ X_{(1)} & X_{(n)} \\ \equiv & \equiv \\ Y_1 & Y_n \end{array}$$

$Y_r \equiv X_{(r)}$: r-οστό μικρότερο $(X_{(r)}, X_{(s)})$, $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$

$r < s$

Παρατηρηση

Δε σημαίνει ότι επειδή έχω τ.δ ότι και οι κατανομές των $\min X_i$, $\max X_i$ θα είναι ίδιες με των παρατηρήσεων.

- **Ευρεση κατανομης $\min X_i = X_{(1)}$ [κατανομή του ελάχιστου διατεταγμένου στατιστικού]:**

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(\min X_i \le x)$$
$$= 1 - P(\min X_i > x)$$
$$= 1 - P(X_1 > x \quad X_2 > x \ \dots \ X_n > x)$$
$$\overset{ανεξ}{=} 1 - P(X_1 > x)\,P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$$

$$\overset{ισόν.}{=} 1 - \left(P(X > x)\right)^n = 1 - \left(1 - F_X(x)\right)^n$$

$$f_{\min X_i}(x) = n\left(1 - F_X(x)\right)^{n-1} f_X(x)$$

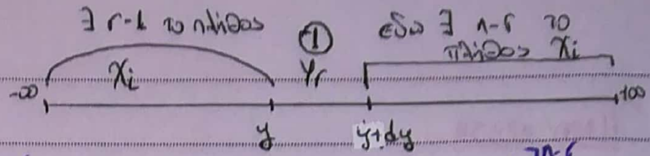
- **Ευρεση κατανομης $\max X_i$**

$$F_{\max X_i}(x) = P(\max X_i \le x)$$
$$= P(X_1 \le x \quad X_2 \le x \ \dots \ X_n \le x)$$
$$\overset{ανεξ}{=} P(X_1 \le x)\,P(X_2 \le x) \dots P(X_n \le x)$$
$$\overset{ισονομα}{=} \left[P(X \le x)\right]^n$$
$$= \left(F_X(x)\right)^n$$

$$f_{\max X_i}(x) = n\left(F_X(x)\right)^{n-1} \cdot f_X(x)$$

- **Ευρεση κατανομης $Y_r \equiv X_{(r)}$**

$f_{Y_r}(y)dy = P(y < Y_r \le y + dy) = P\Big($ να υπάρχουν $r-1$ το πλήθος X_i στο $(-\infty, y]$
να υπάρχει 1 X_i στο $(y, y+dy]$ και
να υπάρχουν $n-r$ το πλήθος X_i στο
$(y+dy, +\infty)\Big)$



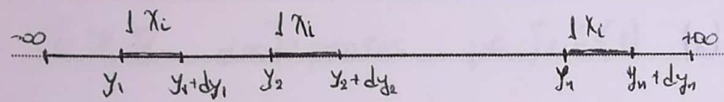
$$= \frac{n!}{(r-1)!\,1!\,(n-r)!}\left[P(-\infty < X \le y)\right]^{r-1} \cdot P(y < X \le y+dy)\left[P(y+dy < X < +\infty)\right]^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[F_X(y)\right]^{r-1}\left[F_X(y+dy) - F_X(y)\right]\left[1 - F_X(y+dy)\right]^{n-r}$$

(Άρα τώρα διαιρώ με dy και παίρνω όριο για $dy \to 0$)

$$f_{Y_r}(y) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[F_X(y)\right]^{r-1} f_X(y)\left[1 - F_X(y)\right]^{n-r}$$

• $f_{Y_1,Y_2,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\,dy_2\cdots dy_n = P(y_1 < Y_1 \le y_1+dy_1, \dots, y_n < Y_n \le y_n+dy_n)$



$y_1 < y_2 < \dots < y_n$

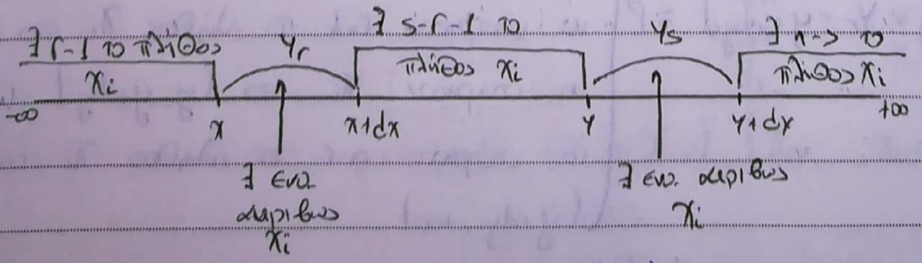
$$\overset{\text{πολυων.}}{=} \frac{n!}{1!\,1!\,1!\cdots 1!} \cdot P(y_1 < X_i \le y_1+dy_1)\cdots P(y_n < X_i \le y_n+dy_n)$$

$$= n!\left[F_X(y_1+dy_1) - F_X(y_1)\right]\cdots\left[F_X(y_n+dy_n) - F_X(y_n)\right]$$

$$\Rightarrow f_{Y_1\dots Y_n}(y_1,\dots,y_n) = n!\, f_X(y_1)\cdots f_X(y_n)$$

• $r < s \quad (X_{(r)}, X_{(s)}) = (Y_r, Y_s)$

$$f_{Y_r,Y_s}(x,y)\,dx\,dy \overset{x<y}{=} P(x < Y_r \le x+dx,\ y < Y_s \le y+dy) =$$



<u>Πιθανότητα</u> $\dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\left[P(-\infty < X \le x)\right]^{r-1} P(x < X \le x+dx)\left[P(x+dx < X < y)\right]^{s-r-1}$

$P(y < X \le y+dy)\cdot\left[P(X > y+dy)\right]^{n-s}$

$= \dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\left(F_X(x)\right)^{r-1}\left[F_X(x+dx)-F_X(x)\right]\left[F_X(y)-F_X(x+dx)\right]^{s-r-1}$

$\left[F_X(y+dy)-F_X(y)\right]\left[1-F_X(y+dy)\right]^{n-s}$

$\Rightarrow f_{Y_rY_s}(x,y) = \dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\left[F_X(x)\right]^{r-1}\cdot f_X(x)\cdot\left[F_X(y)-F_X(x)\right]^{s-r-1} f_X(y)$

$\left[1-F_X(y)\right]^{n-s}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.1</u>

Αν X και Y τ.μ. με από κοινού σ.π.π $f_{XY}(x,y)=4xy$ $0<x<1$ $0<y<1$. Να βρεθεί η από κοινού κατανομή των (X^2, Y^2).

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ορίζω τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} U = X^2 \\ V = Y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt{U} = U^{1/2} \\ Y = \sqrt{V} = V^{1/2} \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}v^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}u^{-1/2}v^{-1/2} \neq 0$$

$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(u^{1/2}, v^{1/2})\left|\frac{1}{4}u^{-1/2}v^{-1/2}\right| = 4 u^{1/2}v^{1/2}\frac{1}{4}u^{-1/2}v^{-1/2} = 1,$

$0 < u^{1/2} < 1 \Rightarrow 0 < u < 1$

$0 < v^{1/2} < 1 \Rightarrow 0 < v < 1$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2

Η από κοινού των τ.μ. X και Y είναι: $f_{XY}(x,y)=4xye^{-(x^2+y^2)}$ Θέλω την κατανομή του $U=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x\geq 0, y\geq 0$

ΛΥΣΗ

Πρέπει να συμπληρώσω τον μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} u=\sqrt{x^2+y^2} \\ v=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=v \\ u^2=x^2+y^2 \Rightarrow y^2=u^2-x^2=u^2-v^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=v \\ y=(u^2-v^2)^{1/2} \end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & u(u^2-v^2)^{-1/2} \end{vmatrix}=u(u^2-v^2)^{-1/2}$$

$$T=\{(u,v): v\geq 0,\ (u^2-v^2)^{1/2}\geq 0\}=\{(u,v): v\geq 0, u^2\geq v^2\} \Rightarrow$$
$$T=\{(u,v): v\geq 0,\ u>v\}$$

$$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(v,(u^2-v^2)^{1/2})\,|u(u^2-v^2)^{-1/2}|$$

$$=4v(u^2-v^2)^{1/2}e^{-u^2}u(u^2-v^2)^{-1/2}=4vue^{-u^2}\quad (u,v)\in T$$

$$f_U(u)=\int_0^u f_{UV}(u,v)dv=\int_0^u 4vue^{-u^2}dv=2u^3e^{-u^2}\quad ,u>0$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.3

Δύο φοιτητές συμφωνούν να συναντηθούν σε ένα εστιατόριο μεταξύ 6 και 7 το απόγευμα. Να βρεθεί η πιθανότητα να συναντηθούν αν ο καθένας συμφωνεί να περιμένει τον άλλον 15 λεπτά και όχι μετά τις 7 και ο καθένας φτάνει ανεξάρτητα στην τύχη μεταξύ 6 και 7

ΛΥΣΗ

Έστω X_1, X_2 οι τ.μ. που παριστάνουν το χρονικό σημείο άφιξης του $1^{ου}$, $2^{ου}$ αντίστοιχα φοιτητή στο διάστημα της μίας ώρας.

$f_{X_1}(x_1) = 1 \quad 0 < x_1 < 1$

Ανεξ/τες άρα

$f_{X_2}(x_2) = 1 \quad 0 < x_2 < 1$

$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 1 \quad 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1$

Θέλουμε να βρούμε $P(-\frac{1}{4} < X_1 - X_2 < \frac{1}{4})$ οπότε πρέπει να βρούμε την κατανομή του $X_1 - X_2$.

$$\left.\begin{array}{l} U = X_1 - X_2 \\ V = X_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = V \\ X_2 = V - U \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Άρα $f_{UV}(u,v) = f_{X_1 X_2}(v, v-u) \cdot |J| = 1 \quad (u,v) \in T$

$$T = \left\{ (u,v): \begin{array}{l} 0 < v < 1 \\ 0 < v - u < 1 \\ -1 < u < 1 \end{array} \right\}$$

$$f_U(u) = \int f_{UV}(u,v)\, dv$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < v < 1 \\ u < v < 1 + u \end{array}\right\} \Rightarrow \max\{0, u\} < v < \min\{1, 1+u\}$$

$$f_U(u) = \begin{cases} \int_0^{1+u} 1\, dv = 1 + u & , -1 < u < 0 \\ \int_u^1 1\, dv = 1 - u & , 0 < u < 1 \end{cases}$$

Άρα $P(-\frac{1}{4} < U < \frac{1}{4}) = \int_{-1/4}^{1/4} f_U(u)\,du = \int_{-1/4}^{0} (1+u)\,du + \int_{0}^{1/4} (1-u)\,du = \frac{7}{16}$

Άσκηση 4.4

Έστω X και Y τ.μ. με από κοινού $f_{XY}(x,y) = 1$ $\quad 0<x<1,\ 0<y<1$

α) Να βρεθούν οι κατανομές των: $Z = X \cdot Y$

$W = \frac{X}{Y}$

β) $P(\frac{1}{4} < W < 2)$

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} Z = X \cdot Y \\ W = \frac{X}{Y} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X = (Z \cdot W)^{1/2} \\ Y = Z^{1/2} W^{-1/2} \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} w^{1/2} z^{-1/2} & \frac{1}{2} z^{1/2} w^{-1/2} \\ \frac{1}{2} w^{-1/2} z^{-1/2} & -\frac{1}{2} w^{-3/2} z^{1/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} w^{-1} - \frac{1}{4} w^{-1} = -\frac{1}{2} w^{-1} \neq 0$$

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(z^{1/2} w^{1/2},\ z^{1/2} w^{-1/2}) \cdot \frac{1}{2} w^{-1} = \frac{1}{2} w^{-1} \quad (z,w) \in T$$

$$T = \left\{ (z,w) : \begin{array}{l} 0 < z^{1/2} w^{1/2} < 1 \\ 0 < z^{1/2} w^{-1/2} < 1 \\ 0 < z < 1 \quad (\text{εκ ορισμού}) \\ w > 0 \end{array} \right\}$$

$$f_Z(z) = \int f_{ZW}(z,w)\,dw$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < z^{1/2} w^{1/2} < 1 \Rightarrow 0 < w < z^{-1} \\ 0 < z^{1/2} w^{-1/2} < 1 \Rightarrow z < w \\ 0 < w \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \max\{0,z\} < w < \frac{1}{z} \\ \\ 0 < z < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow z < w < \frac{1}{z}$$

$$f_Z(z) = \int_z^{1/z} \frac{1}{2} w^{-1} dw = -\ln z \qquad 0<z<1$$

$$f_W(w) = \int f_{Z,W}(z,w)\,dz$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < z^{1/2} w^{1/2} < 1 \Rightarrow 0<z<w^{-1} \\ 0 < z^{1/2} w^{-1/2} < 1 \Rightarrow 0<z<w \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0<z<1 \end{array}\right\} \quad 0 < z < \min\{w^{-1}, w, 1\}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις
$0<w<1$ και $w \geq 1$

$$f_W(w) = \begin{cases} \int_0^{w} \frac{1}{2} w^{-1} dz = \frac{1}{2}, & 0<w<1 \\ \int_0^{1/w} \frac{1}{2} w^{-1} dz = \frac{1}{2w^2}, & w \geq 1 \end{cases}$$

β) $P(\frac{1}{4} < w < 2) = \int_{-1/4}^{1} \frac{1}{2} dw + \int_1^2 \frac{1}{2w^2} dw$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.7</u> (Η/ω)
U, V ανεξάρτητες με $U \sim$ Γάμμα $(a, 1)$
$V \sim$ Γάμμα $(b, 1)$

Βρείτε την από κοινού: $\begin{cases} X = U+V \\ Y = U-V \end{cases}$ και την περιθώρια του X.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.9</u> (Η/ω)
X_1, X_2 τ. δείγμα από $N(0,1)$ ανεξάρτητες
$\begin{cases} Y_1 = X_1^2 + X_2^2 \\ Y_2 = X_1 \end{cases}$ Βρείτε την από κοινού τους

ΑΣΚΗΣΗ 4.9 (Η/ω)

X_1, X_2 ανεξ/τες και ισόνομες

$f_{X_i}(x_i) = 2e^{-2x_i}$, $x_i > 0$

$U = X_1 + X_2$, $V = \frac{X_1}{X_2}$

Να βρεθεί η από κοινού των U και V, η περιθώρια του U και η περιθώρια του V, να ελέγξετε αν U και V ανεξάρτητες.

ΑΣΚΗΣΗ 4.13 (Η/ω)

$X \sim$ Βήτα (a, b) ανεξ/τες

$Y \sim$ Βήτα $(a+b, \gamma)$

Βρείτε την κατανομή του $U = X \cdot Y$.